ТРЁХМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКИХ СРЕД В ПРОНИЦАЕМЫХ КАНАЛАХ

С.А. Светлов, Л.В. Китаева

Исследованы трёхмерные течения жидкости в проницаемых каналах мембранных установок прямоугольного и квадратного поперечного сечений на основе уравнений гидродинамики. В случае предельно низких значений характерного числа Рейнольдса сформулирована автомодельная задача и получена определяющая система дифференциальных уравнений в частных производных. Найдена зависимость для распределения давления внутри канала. С целью анализа кинематической структуры течения рассмотрена его часть в окрестности угла для канала квадратного поперечного сечения.

Математическое описание движения жидкой среды общими дифференциальными уравнениями, учитывающими все физические свойства, присущие этой среде, оказывается сложной задачей, поэтому в гидродинамике широко используют упрощенные модели среды и отдельных явлений [1].

Дифференциальное уравнение движения совместно с начальными и граничными условиями полностью определяет задачу, т.е. зная геометрическую форму поверхности, начальные и граничные условия, можно найти функцию распределения скорости в сечении канала.

Основные методы решения дифференциального уравнения движения изложены в работах [2-5]. Одной из основных в гидродинамике является модель несжимаемой идеальной жидкости.

Игнорирование свойств вязкости и сжимаемости значительно упрощает математическое описание движения жидкости и позволяет получить многие решения в конечном замкнутом виде. Более полно свойства реальной жидкости учитываются в модели вязкой несжимаемой жидкости, которая представляет собой среду, обладающую текучестью и вязкостью, но абсолютно несжимаемую.

Теория вязкой несжимаемой жидкости лишь в ограниченном числе случаев с простейшими граничными условиями позволяет получить точные решения полных уравнений движения, поэтому важной задачей является решение приближенных уравнений.

Рассмотрим течение жидкости в каналах, образующая которых является прямой линией, а поперечное сечение представляет собой прямоугольник (рис. 1). Течения образованы подачей жидкости с постоянной скоростью через стенки канала. Без ущерба общности будем считать плотность жидкости ρ=1.

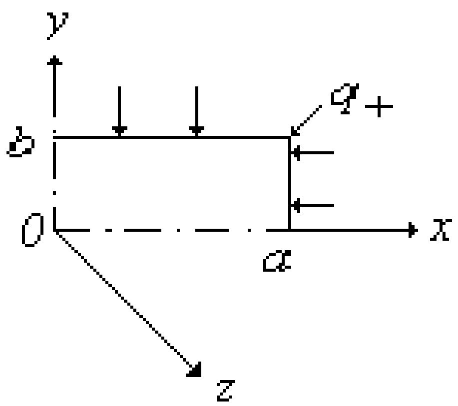

Рис. 1. Схема поперечного сечения канала

Исследуемое движение описывается системой уравнений в декартовой системе координат, которая в безразмерных переменных имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0, \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{\partial p}{\partial x}+Re^{-1}\Delta u, \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}=-\dfrac{\partial p}{\partial y}+Re^{-1}\Delta v, \\ u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}=-\dfrac{\partial p}{\partial z}+Re^{-1}\Delta w. \end{cases}$$

где u, v и w – компоненты вектора скорости $\bar{V}$ вдоль осей x, y и z, соответственно;

p – давление жидкости; Re - число Рейнольдса;

$Re=\rho q_c L/\mu$; q_c – средняя скорость жидкости через проницаемую поверхность;

μ – коэффициент динамической вязкости жидкости;

Δ – оператор Лапласа.

Граничные условия для поставленной задачи следующие: полагаем, что в начале канала при $z=0$: $w=0$, на оси симметрии ($x=0$, $y=0$): $u=v=0=\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}$,

на проницаемых стенках канала: q_+ = -1.

Система уравнений и граничные условия приведены к безразмерному виду, нормируя координаты на характерный размер L, а скорость и давление по соотношениям

$$v=\frac{\overline{V}}{q_c}, \quad p=\frac{P}{\rho q_c^2},$$

где P - давление на входе в дренажный канал.

Известно [6-7], что решение задачи в размерных переменных имеет вид:

$$\begin{aligned}
&u=u(x,y), \quad v=v(x,y),\\
&w=zW(x,y),\\
&p=p_0-\frac{1}{2}\rho w_{max}^2-F(x,y),\\
&w_{max}=zW(0,0),
\end{aligned} \tag{1}$$

где p_0 – значение давления в начале координат, а функция $F(x,y)$ подлежит определению.

Кроме того, полагаем, что

$$w=q_+\frac{\pi}{2}\frac{\Pi_0}{F_0}z\cdot\cos\frac{\pi}{2}\frac{F}{F_0},$$

где q_+ – нормальная к стенке канала компонента вектора скорости (скорость подачи жидкости);

Π_0, F_0 – периметр и площадь поперечного сечения канала.

Причём, для прямоугольного канала шириной a и высотой b получаем следующие соотношения для скоростей w и w_{max}:

$$w=q_+\frac{\pi}{2}\frac{a+b}{ab}z\cdot\cos\frac{\pi}{2}\frac{F}{F_0},$$

$$w_{max}=q_+\frac{\pi}{2}\frac{a+b}{ab}z.$$

Итак, компоненты вектора скорости имеют вид:

$$u=u(x,y), \quad v=v(x,y),$$

$$w=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+b}{ab}\cdot z\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{F}{F_0}\right).$$

Если в качестве L можно выбрать отношение площади канала к его периметру, то есть

$$L=\frac{ab}{a+b},$$

то в безразмерной форме

$$w=\frac{\pi}{2}z\cdot\cos\frac{\pi}{2}\frac{F}{F_0}.$$

Все координаты в системе уравнений обезразмерены на характерный размер канала, что неудобно, так как L - масштаб лишь для координаты z. В качестве масштабов для координат x и y можно выбрать ширину a и высоту b канала соответственно. Тогда $x\in[0;1]$, $y\in[0;1]$ и получим

$$\begin{cases}
\frac{L}{a}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{L}{b}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,\\
\frac{L}{a}u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{L}{b}v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{L}{a}\frac{\partial p}{\partial x}+Re^{-1}\Delta u,\\
\frac{L}{a}u\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{L}{b}v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{L}{b}\frac{\partial p}{\partial y}+Re^{-1}\Delta v,\\
\frac{L}{a}u\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{L}{b}v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+Re^{-1}\Delta w,
\end{cases}$$

или, введя обозначения $\alpha=\frac{L}{a}$, $\beta=\frac{L}{b}$, вместо данной системы получим

$$\begin{cases} \alpha\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0, \\ \alpha u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\alpha\dfrac{\partial p}{\partial x}+Re^{-1}\Delta u, \\ \alpha u\dfrac{\partial v}{\partial x}+\beta v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}=-\beta\dfrac{\partial p}{\partial y}+Re^{-1}\Delta v, \\ \alpha u\dfrac{\partial w}{\partial x}+\beta v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}=-\dfrac{\partial p}{\partial z}+Re^{-1}\Delta w, \end{cases}$$

где $\Delta=\alpha^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\beta^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

С учетом соотношений (1) последняя система примет вид:

$$\begin{cases} \alpha\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial v}{\partial y}+W=0, \\ \alpha u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta v\dfrac{\partial u}{\partial y}=\alpha\dfrac{\partial F}{\partial x}+Re^{-1}\Delta u, \\ \alpha u\dfrac{\partial v}{\partial x}+\beta v\dfrac{\partial v}{\partial y}=\beta\dfrac{\partial F}{\partial y}+Re^{-1}\Delta v, \\ \alpha u\dfrac{\partial W}{\partial x}+\beta v\dfrac{\partial W}{\partial y}+W^2=W_{max}^2+Re^{-1}\Delta w. \end{cases}$$

где $W_{\max}=W(0{,}0)$. (2)

Проведем анализ зависимости давления. Решение системы (2) зависит от величины числа Рейнольдса. Рассмотрим два предельных случая: $Re\to\infty$ и $Re\to 0$.

Для случая "исчезающей вязкости" вернемся к соотношениям (1). Найдем функцию $F(x,y)$ при $Re\to\infty$. Для этого рассмотрим второе и третье уравнения системы (2):

$$\begin{cases} \alpha u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta v\dfrac{\partial u}{\partial y}=\alpha\dfrac{\partial F}{\partial x}, \\ \alpha u\dfrac{\partial v}{\partial x}+\beta v\dfrac{\partial v}{\partial y}=\beta\dfrac{\partial F}{\partial y}. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение этой системы на u, а второе на v:

$$\begin{cases} \alpha u\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2}{2}\right)+\beta v\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{u^2}{2}\right)=\alpha u\dfrac{\partial F}{\partial x}, \\ \alpha u\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{v^2}{2}\right)+\beta v\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{v^2}{2}\right)=\beta v\dfrac{\partial F}{\partial y}. \end{cases}$$

Далее, сложив полученные уравнения, будем иметь

$$F=\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right).$$

Заметим, что эта формула справедлива для любых α и β, в том числе для $\alpha=\beta$, то есть для канала с квадратным поперечным сечением.

Рассмотрим второй предельный случай решения системы (2) при $Re\to 0$ для квадратного канала. Заметим, что для квадратного канала $a=b$, $L=a/2$, тогда $\alpha=\beta=1/2$ и система (2) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v}{\partial y}+W=0, \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{1}{2}Re^{-1}\Delta u, \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{1}{2}Re^{-1}\Delta v, \\ \dfrac{1}{2}u\dfrac{\partial W}{\partial x}+\dfrac{1}{2}v\dfrac{\partial W}{\partial y}+W^2=W_{max}^2+\dfrac{1}{4}Re^{-1}\Delta w \end{cases}$$

и при $Re\to 0$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v}{\partial y}+W=0, \\ -Re\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \\ -Re\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \\ Re\left(\dfrac{1}{2}u\dfrac{\partial W}{\partial x}+\dfrac{1}{2}v\dfrac{\partial W}{\partial y}+W^2-W_{max}^2\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right). \end{cases}$$

Граничные условия следующие:

$$u(0,y)=0,\ u(1,y)=-1,$$
$$v(x,0)=0,\ v(x,1)=-1. \tag{3}$$

Пусть $W_{max} = C$. Так как число Рейнольдса $Re \to 0$, то последнее уравнение системы (3) равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \\ C^2 = \dfrac{1}{2}\left(u \dfrac{\partial W}{\partial x} + v \dfrac{\partial W}{\partial y} \right) + W^2. \end{cases} \tag{4}$$

В силу симметрии течения, используя метод разделения переменных, находим решение в виде

$$W = c_0^2 \left(1 - x\right) \cdot \left(1 - y\right).$$

Теперь рассмотрим первое уравнение системы (3)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} + W = 0.$$

Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ – симметричные, вид их находим, применяя метод разделения переменных

$$u\left(x,y\right) = \alpha \cdot c_0^2 x\left(1 - x/2\right) \cdot \left(1 - y\right),$$
$$v\left(x,y\right) = \beta \cdot c_0^2 y\left(1 - y/2\right) \cdot \left(1 - x\right).$$

Из граничных условий на стенке канала $u(1,y) = -1$. С другой стороны,

$$u\left(1,y\right) = \frac{1}{2}\alpha \cdot c_0 \left(1 - y\right),$$

тогда

$$\int_0^1 u\left(1,y\right) dy = \frac{1}{2}\alpha \cdot c_0^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\alpha \cdot c_0^2 = -1$$

откуда следует, что

$$\alpha \cdot c_0^2 = -4. \tag{5}$$

Аналогично рассуждая, можно показать, что

$$\beta \cdot c_0^2 = -4. \tag{6}$$

Подставляя выражения (5) и (6) в уравнения скорости, получим

$$u\left(x,y\right) = -4x\left(1 - x/2\right) \cdot \left(1 - y\right),$$
$$v\left(x,y\right) = -4y\left(1 - y/2\right) \cdot \left(1 - x\right).$$

Найдем коэффициенты α и β. Для этого продифференцируем функцию $u(x,y)$ по x, а функцию $v(x,y)$ по y, применяя метод группировки, получим:

$$\left(-4 + c_0^2\right)\left(1 - x\right)\left(1 - y\right) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$-4 + c_0^2 = 0$$

или

$$c_0 = 2.$$

Из формул (5) и (6) следует, что

$$\alpha = \beta = -1.$$

Далее, зная функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, найдем зависимость для распределения давления внутри канала при $Re \to 0$.

Так как в случае, когда число Рейнольдса $Re \to \infty$, функция $F_0(x,y)$ должна быть равна нулю, то для нее можно предложить зависимость

$$F_0(x,y) = \frac{1}{Re} F(x,y).$$

С учетом этого выражения система (4) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v}{\partial y} + W = 0, \\ -\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ -\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{2} u \dfrac{\partial W}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial W}{\partial y} + W^2 - W_{\max}^2 \right) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right). \end{cases}$$

Найдем вторые производные функции $u(x,y)$ по x и по y и подставим их во второе уравнение данной системы

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2(1 - y),$$

откуда следует, что

$$F = f(y) - 2\int_0^x (1-y)\,dx \cdot$$

Аналогично из третьего уравнения системы (3), зная функцию $v(x,y)$, можно получить

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2(1-x)$$

или, проинтегрировав,

$$F = g(x) - 2\int_0^y (1-x)\,dy \cdot$$

Откуда следует, что

$$F = 2(1-x)(1-y) \cdot$$

Теперь найдем неизвестную $C(x,y)$. Для этого вернемся ко второму уравнению системы (4)

$$C^2 = \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial W}{\partial x} + v\frac{\partial W}{\partial y}\right) + W^2 \cdot$$

С учетом выражений для скорости, получим, что

$$C^2(x,y) = 4\left(2(1-x)^2(1-y)^2 + (1-x)^2 + (1-y)^2\right) \cdot$$

Итак, найдено автомодельное решение задачи в случае, когда число Рейнольдса $Re \to 0$.

Теперь для функции $F(x,y)$ можно предложить зависимость

$F(x,y) = F_0(x,y) + F_\infty(x,y)$, причем $F_0(x,y) = 0$ при $Re \to \infty$ и $F_\infty(x,y) = 0$ при $Re \to 0$. Показано, что

$$F = \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right) \cdot$$

С целью анализа кинематической структуры течения рассмотрим его часть в окрестности угла A для канала квадратного поперечного сечения, представленного на рисунке 2. Для этого введем новую систему координат, расположив угол в ее начале. Предполагается, что в окрестности угла есть бесконечно малое скругление.

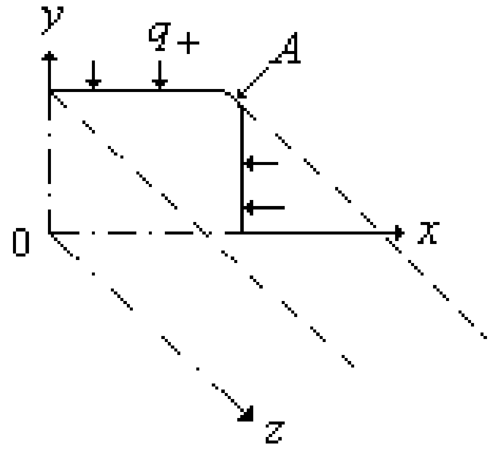

Рис. 2. Схема канала

При $Re \to \infty$ в окрестности угла компоненты вектора скорости $u \sim v \sim 1$, $w \sim 0$. Тогда последнее уравнение системы (4) примет вид

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y}\right) \approx C^2 \cdot$$

В силу симметрии течения относительно диагонали, используя метод разделения переменных, находим решение уравнения в виде

$$W = X \cdot Y = \alpha^2 \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right),$$

где k – коэффициент.

Но известно, что при $Re \to \infty$

$$W = Cf(x,y),$$

где $C = \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\Pi_0}{F_0}$ определяется геометрическими размерами канала и для канала с сечением в форме квадрата получим $C = \pi$.

Тогда из уравнений следует, что

$$\alpha = \sqrt{C} = \sqrt{\pi}$$

и зависимость скорости

$$W = \pi\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) \cdot \qquad (7)$$

Данная зависимость позволяет судить о трансформации трубок тока в окрестности угла.

Пусть $W \in [0, C)$ – параметр, тогда из (7) имеем

$$y = (2/\pi)\arccos\left(W/\left(\pi \cdot \cos(\pi x/2)\right)\right).$$

Рассмотрев уравнения изолиний $W = const$ из указанной области определения, получим следы трубок тока в окрестности угла на поверхности $z = const$, показанные на рисунке 3.

При $Re \to 0$ четвертое уравнение системы (3) примет вид:

$$\Delta w = 0$$

или

$$W''_{xx} + W''_{yy} = 0.$$

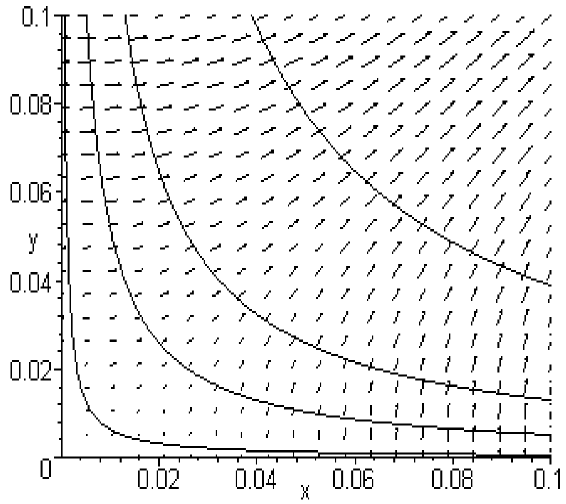

Рис. 3. Линии тока при $Re \to \infty$

В силу симметрии течения относительно диагонали AO будем искать решение в виде

$$X''Y + XY'' = 0$$

или

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda^2, \quad (8)$$

где $\lambda^2 = const$.

Граничные условия остаются неизменными.

Выражение (8) равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} X'' - \lambda^2 X = 0, \\ Y'' + \lambda^2 Y = 0. \end{cases}$$

Но в силу симметрии решения это возможно только при $\lambda = 0$. Тогда из последней системы следует, что

$$X'' = 0.$$

Проинтегрировав это выражение, получим

$$X = c_1 x + c_2. \quad (9)$$

Но из граничного условия $X(0) = 0$ следует, что $c_2 = 0$, тогда (9) примет вид

$$X = c_1 x.$$

В силу симметрии решения

$$Y = c_1 y.$$

Пусть $c_1 = \alpha_0$, тогда

$W = X \cdot Y = \alpha_0^2 xy$ и $\alpha_0 \sim \sqrt{C_0}$,

где $C_0 = C(Re)$ при $Re \to 0$.

Тогда уравнения изолиний $W = const$ имеют вид

$$y = \frac{W}{\alpha_0^2 x}.$$

Если предположить, что $C_0 \sim C$ и $\alpha_0 \sim \alpha$, то и уравнения изолиний

$$y = \frac{W}{\alpha_0^2 x} \sim \frac{W}{\alpha^2 x}.$$

Картина изолиний изображена на рисунке 4.

Как следует из зависимостей на рисунках 3 и 4, картина изолиний $W = const$ двух рассмотренных режимов течения качественно похожи. Кроме того, если вблизи начала координат форма изолиний близка к очертаниям угла, то по мере удаления контуры $W = const$ более напоминают дуги окружностей. Поэтому можно предполагать, что вблизи центра канала течение стремится к осесимметричному.

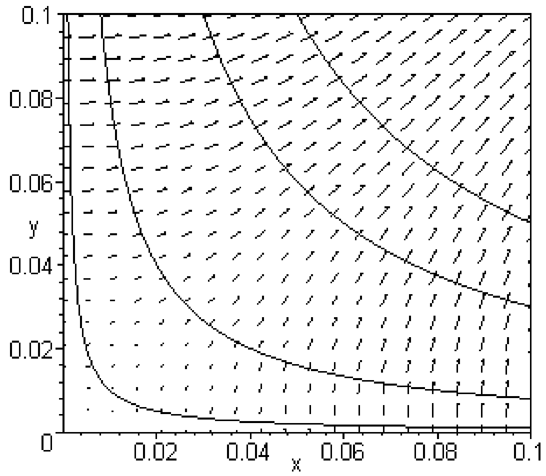

Рис. 4. Линии тока при $Re \to 0$

Согласно результатов работы [8] и полагая $Re_0 = 0$ «нулевым приближением», можно показать, что в этом случае течение (рис. 5) будет характеризоваться уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \dfrac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial p_0}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial p_0}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial p_0}{\partial z} = \mu \Delta w_0 \\ \Delta \omega_0 = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

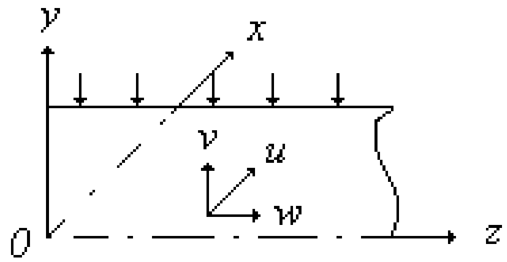

Рис. 5. Схема области течения

Граничными условиями на поверхности канала будут следующие:

условие прилипания $w_0 = v_{\sigma 0} = 0$,

скорость проницаемости $v_{n0} = V(z,\sigma)$,

где σ – криволинейная координата, отсчитываемая вдоль контура в начальном сечении,

$$p_0 = p_н, \quad \int\limits_S w_0 dS = SU,$$

где $p_н$ – давление, при котором жидкость поступает в канал;

S – площадь начального сечения;

U – скорость жидкости через начальное сечение.

Если удастся получить решение задачи (10)), то можно организовать процесс уточнения этого решения. Тогда для вычисления поправок k-го порядка получаются системы уравнений вида

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} + \frac{\partial w_k}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial p_k}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial p_k}{\partial y} = f_y,$$

$$\frac{\partial p_k}{\partial z} - \mu \Delta w_k = f_z,$$

$$\Delta\left(\frac{\partial u_k}{\partial y} - \frac{\partial v_k}{\partial x}\right) = \phi,$$

причем правые части этих уравнений содержат компоненты вектора скорости $u_i,\ v_i,\ w_i \quad (i \le \kappa - 1)$ и их производные; на поверхности канала и в начальном сечении для искомых функций задаются нулевые условия.

Рассмотрим пример применения предложенного алгоритма уточнения решения к течению в канале с круговым поперечным сечением. В этом случае уравнения и граничные условия нулевого приближения, если поток осесимметричен, имеют вид\

$$\frac{dp_0}{dz} = \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial r}\right), \quad (11)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \quad (12)$$

$$r = R: \ w_0 = 0, \ \ v_0 = V(z); \quad r = 0: \ \frac{\partial w_0}{\partial r} = 0, \ \ v_0 = 0;$$

$$z=0:\ \ p_0=p_н,\quad \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi r w_0 dr=U$$

где r – радиус канала.

Из уравнений (11), (12) с учетом граничных условий находим

$$w_0=-\frac{1}{4\mu}\frac{dp_0}{dz}(R^2-r^2),$$

$$v_0=\frac{1}{16\mu}\frac{d^2p_0}{dz^2}(2R^2r-r^3).$$

Полагая $R=r$ и используя граничные условия, находим уравнение для p_0

$$\frac{d^2p_0}{dz^2}=\frac{16\mu}{R^3}V(z), \tag{13}$$

$$\frac{dp_0}{dz}\Big|_{z=0}=-\frac{8\mu U}{R^2}.$$

Тогда, вводя функцию $q=\int_0^z\int_0^z V(z)dzdz$ из (13), получим

$$p_0=p_н-\frac{8\mu}{R^3}(RUz-2q) \tag{14}$$

и, следовательно, составляющие скорости в нулевом приближении выражаются формулами

$$w_0=\frac{2}{R^3}(RU-2q')\cdot(R^2-r^2),\ \ v_0=\frac{V}{R^3}\cdot(2R^2r-r^3).$$

Вычислим поправки первого приближения, пользуясь формулами

$$v_0\frac{\partial w_0}{\partial r}+w_0\frac{\partial w_0}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp_1}{dz}+\nu(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w_1}{\partial r})$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial r}+\frac{v_1}{r}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=0, \tag{15}$$

с граничными условиями

$$r=R:\ \ w_1=v_1=0;\quad r=0:\ \frac{\partial w_1}{\partial r}=v_1=0;$$

$$z=0:\ \ p_1=0,\quad \int_0^R r w_1 dr=0.$$

Подставляя выражение скорости w_0 в уравнения (15) аналогично решению в нулевом приближении, получим последовательно уравнения скорости w_1, v_1 и давления

$$\frac{d^2p_1}{dz^2}=\frac{6\rho\left[V(RU-2q')\right]'}{R^2}.$$

Интегрирование последнего уравнения с учетом условий при $z=0$ дает

$$p_1=\frac{6\rho}{R^2}(RUq'-q'^2),$$

после чего, вводя значение p_1 в выражения для нахождения поправок первого приближения компонент вектора скорости и добавляя к соответствующему выражению (14) вычисленные таким образом поправки, можем для формулы первого приближения окончательно записать

$$p\approx p_н-\frac{8\mu}{R^3}(RU^2-2q)+\frac{6\rho}{R^2}(RUq'-q'^2).$$

Работоспособность алгоритма уточнения при получении осесимметричного решения показывает в том, что с его помощью могут быть получены и соответствующие решения пространственной задачи для случая, когда число Рейнольдса $Re<<1$, например, для каналов, образующая которых является прямой линией, а поперечное сечение представляет собой прямоугольник или квадрат. Для таких каналов показано, что вблизи угла форма трубок тока близка к очертаниям угла, а по мере удаления контуры все более напоминают дуги окружностей. Поэтому можно предполагать, что вблизи центра канала течение стремится к осесимметричному.

В результате анализа течения жидкости в проницаемых каналах в случае предельно низких значений характерного числа Рейнольдса показано, что кинематика движения не зависит от числа Рейнольдса, а динамика – зависит. Найдены фундаментальные решения задачи, используя метод разделения переменных. При этом использовались предположения о симметрии решения по переменным. В случае предельно высоких значений характерного числа Рейнольдса показано, что динамика не зависит от числа Рейнольдса. Построенные картины изолиний $W = const$ двух рассмотренных режимов течения при $(Re \to \infty)$ и $(Re \to 0)$ качественно похожи. Кроме того, если вблизи начала координат форма изолиний близка к очертаниям угла, то по мере удаления контуры продольной компоненты вектора скорости более напоминают дуги окружностей. Поэтому можно предполагать, что вблизи центра канала течение стремиться к осесимметричному. Для случая предельно низких значений характерного значения числа Рейнольдса на примере круглого канала описан алгоритм получения решения "нулевого приближения" и его последующего уточнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Темцев Б.Т. Техническая гидромеханика. - М.: Машиностроение, 1978. - 463 с.
2. Владимиров В.В. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1988. - 512 с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. - 736 с.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Учебник. Т.1. - М.: Наука, 1970. - 440 с.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989. - 432 с.
6. Berman A.S. Laminar flow in channels with porous walls // J. Appl. Phys. - 1953. - V. 24. - N 9. - P. 1232-1235.
7. Taylor C.L., Banks W.H.H., Zaturska M.B., Drazin P.G. Three-dimensional flow in a porous channel // Q. J. Mech. Appl. Math.-1991.-V. 44.- P. 105-133.
8. Регирер С.А. О приближенной теории течения вязкой несжимаемой жидкости в трубах с проницаемыми стенками // Журнал технической физики. - 1960.-Т. 30. - В. 6. - С. 639-641.